

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Estadística y probabilidad

Viernes 18 de noviembre de 2016 (mañana)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[60 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 17]

En esta pregunta puede suponer que los datos que se dan constituyen una muestra aleatoria tomada de una distribución normal bidimensional, donde el coeficiente de correlación momento-producto de la población es ρ .

Richard desea realizar un estudio sobre dos tipos de exámenes a los que se van a presentar un gran número de alumnos. Toma una muestra aleatoria compuesta por los resultados de 10 alumnos. Estos datos se muestran en la siguiente tabla.

Alumno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Examen 1	51	70	10	22	99	33	45	8	65	82
Examen 2	52	64	8	25	90	43	50	50	70	50

(a) Halle para estos datos el coeficiente de correlación momento-producto, r . [2]

Utilizando estos datos, se decide contrastar a un nivel de significación del 1% la hipótesis nula $H_0 : \rho = 0$ frente a la hipótesis alternativa $H_1 : \rho > 0$.

- (b) (i) Indique cuál es la distribución del estadístico del contraste (incluyendo todos los parámetros).
 (ii) Halle el valor del parámetro p correspondiente a este contraste.
 (iii) Indique la conclusión, enmarcándola en el contexto de la pregunta e incluyendo la palabra "correlación" en su respuesta. Justifique su respuesta. [6]

Richard decide presentarse él mismo a estos exámenes. Saca un 11 en el Examen 1 pero se extravía la nota que ha sacado en el Examen 2.

(c) Utilizando una recta de regresión apropiada, halle una estimación para la nota que ha obtenido en el Examen 2. Dé la respuesta aproximando al número entero más próximo. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Caroline cree que la nota media de la población en el Examen 2 es 6 puntos mayor que la nota media de la población en el Examen 1. Utilizando los datos originales correspondientes a esos 10 alumnos, se decide contrastar a un nivel de significación del 5% esta hipótesis, frente a la hipótesis alternativa de que la media de las diferencias, $d = \text{nota del examen 2} - \text{nota del examen 1}$, es menor que 6 puntos.

- (d) (i) Indique cuál es la distribución del estadístico del contraste (incluyendo todos los parámetros).
- (ii) Halle el valor del parámetro p .
- (iii) Indique la conclusión, justificando la respuesta. [6]

2. [Puntuación máxima: 17]

John toca la campana de una iglesia 120 veces. El intervalo de tiempo, T_i , que hay entre dos campanadas consecutivas es una variable aleatoria de media 2 segundos y varianza $\frac{1}{9}$ segundos².

Cada intervalo de tiempo, T_i , es independiente del resto de intervalos. Sea $X = \sum_{i=1}^{119} T_i$ el tiempo total entre la primera campanada y la última campanada.

(a) Halle

(i) $E(X)$;

(ii) $\text{Var}(X)$.

[3]

(b) Explique por qué se puede utilizar una distribución normal como modelo aproximado para X .

[2]

(c) Utilice este modelo para hallar los valores de A y B tales que $P(A < X < B) = 0,9$, donde A y B son simétricos respecto a la media de X .

[7]

Posteriormente, el cura de la iglesia sospecha que John ha dejado de ir a la iglesia a tocar la campana y que está dejando que sea su amigo Ray quien lo haga. Cuando Ray toca la campana, el intervalo de tiempo, T_i , tiene una duración media de 2 segundos y una varianza de $\frac{1}{25}$ segundos².

El cura de la iglesia elabora las siguientes hipótesis:

H_0 : Ray está tocando la campana; H_1 : John está tocando la campana.

El cura anota cuatro valores de X . Para tomar una decisión, opta por aplicar la siguiente regla:

Si $236 \leq X \leq 240$ para los cuatro valores de X , aceptará H_0 , en caso contrario aceptará H_1 .

(d) Calcule la probabilidad de que cometa un error de tipo II.

[5]

3. [Puntuación máxima: 15]

Alun contesta a una serie de preguntas de matemáticas y comprueba su respuesta después de responder a cada una.

La probabilidad de que conteste correctamente a una pregunta dada es siempre igual a $\frac{6}{7}$, independientemente del resto de preguntas. Decide que parará a tomar un café inmediatamente después de su segunda respuesta incorrecta. Sea X el número de preguntas que contesta Alun antes de parar para tomar un café.

(a) (i) Indique cuál es la distribución de X , incluyendo sus parámetros.

(ii) Calcule $E(X)$.

(iii) Calcule $P(X = 5)$.

[6]

Nic contesta a una serie de preguntas de matemáticas y comprueba su respuesta después de responder a cada una.

Inicialmente, la probabilidad de que conteste correctamente a una pregunta es igual

a $\frac{6}{7}$. Sin embargo, después de su primera respuesta incorrecta Nic pierde confianza

en sus propias capacidades y, a partir de ese momento, la probabilidad de que conteste correctamente a una pregunta será de solo $\frac{4}{7}$.

Tanto antes como después de esa primera respuesta incorrecta, el resultado de cada pregunta es independiente del resultado obtenido en el resto de preguntas. Nic también decide que parará a tomar un café inmediatamente después de su segunda respuesta incorrecta. Sea Y el número de preguntas que contesta Nic antes de parar para tomar un café.

(b) (i) Calcule $E(Y)$.

(ii) Calcule $P(Y = 5)$.

[9]

4. [Puntuación máxima: 11]

Dos variables aleatorias discretas e independientes X e Y tienen por función generatriz de probabilidad a $G(t)$ y a $H(t)$, respectivamente. Sea $Z = X + Y$, con función generatriz de probabilidad $J(t)$.

(a) Escriba una expresión para $J(t)$ en función de $G(t)$ y $H(t)$. [1]

(b) Derivando $J(t)$, demuestre que

(i) $E(Z) = E(X) + E(Y)$;

(ii) $\text{Var}(Z) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$. [10]
